

高等学校建筑环境与设备工程专业规划教材

流体力学泵与风机

(第五版)

蔡增基 龙天渝 主编



中国建筑工业出版社

责任编辑:姚荣华
封面设计:谭克



经销单位:各地新华书店、建筑书店

网络销售:本社网址 <http://www.cabp.com.cn>

网上书店 <http://www.china-building.com.cn>

博库书城 <http://www.bookuu.com>

图书销售分类: 高校教材(V)

ISBN 978-7-112-11121-3



9 787112 111213 >

(18364) 定价: 39.00 元

高等学校建筑环境与设备工程专业规划教材

流体力学泵与风机

(第五版)

蔡增基 龙天渝 主编

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

流体力学泵与风机/蔡增基等主编. —5版. —北京: 中国建筑工业出版社, 2009

(高等学校建筑环境与设备工程专业规划教材)

ISBN 978-7-112-11121-3

I. 流… II. 蔡… III. ①流体力学-高等学校: 技术学校-教材 ②泵-高等学校: 技术学校-教材 ③鼓风机-高等学校: 技术学校-教材 IV. 035 TH3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 116742 号

本书 (五版) 介绍流体静力学, 一元流体动力学, 不可压缩流体动力学, 绕流运动, 孔口和管路计算的基本理论, 气体射流, 相似性原理和因次分析以及常用泵与风机的原理和特性, 并附录了常用泵和风机的运行和性能资料。每章均附有思考题和习题, 书末有部分习题答案。

本次修订保持了第四版的基本内容和特色。增添了思考题; 对概念的表述和公式的条件等进一步作了修正; 强调了变频泵和风机的应用基础, 更新了陈旧的型号。

* * *

责任编辑: 姚荣华

责任设计: 赵明霞

责任校对: 刘 钰 陈晶晶

高等学校建筑环境与设备工程专业规划教材

流体力学泵与风机

(第五版)

蔡增基 龙天渝 主编

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

各地新华书店、建筑书店经销

北京红光制版公司制版

北京凌奇印刷有限责任公司印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 25¼ 字数: 615 千字

2009 年 11 月第五版 2009 年 11 月第三十四次印刷

定价: 39.00 元

ISBN 978-7-112-11121-3

(18364)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

修 订 说 明

《流体力学泵与风机》原为供热通风空调和燃气工程专业编写，长期的教学实践表明，同样在土建、环境、能源、交通、纺织、冶金、陶瓷和食品等专业中广为使用。

着手修订再版时，反复考虑了教学大纲、教学时数以及专业培养目标。编者认为在内容上不宜机械地过度扩大专业使用面和过度强调理论性，片面提高内容深度；本教材采用的一元流动到三元流动，兼顾三元流动到一元流动（集中体现在第七章）的教学体系，使教学由浅入深。循序渐进，易于理解掌握和自学。

因此，本次修订保持教材原有的基本内容和教学体系。修订的主要内容：围绕教学大纲，每章增设了思考题，将每章的练习题统一分为思考题和习题两部分；继续修正教学中发现的概念或公式的定义、条件等不妥或模糊处，对概念的内涵、表述的严密性和准确性，公式的条件和物理意义给予了充分的重视；下篇泵与风机强调了变频泵和风机的应用基础，更新了陈旧的型号，对附录作了较大的改动。

修订分工。上篇流体力学，第一、四、十章：重庆大学蔡增基教授。第二、三、七、八章：重庆大学龙天渝教授。第五、六、九章：西安建筑科技大学陈郁文教授。下篇泵与风机：重庆大学田胜元教授。主编：重庆大学蔡增基教授、龙天渝教授。

本教材配有学习辅导材料：《流体力学学习辅导与习题精解》蔡增基编，中国建筑工业出版社。详见封底里页介绍。

真诚地欢迎和感谢读者和同行们对本教材提出宝贵意见和指出错误或不妥之处。

目 录

上篇 流 体 力 学

第一章 绪论	1
第一节 作用在流体上的力	1
第二节 流体的主要力学性质	3
第三节 流体的力学模型	11
思考题	12
习题	12
第二章 流体静力学	14
第一节 流体静压强及其特性	14
第二节 流体静压强的分布规律	16
第三节 压强的计算基准和量度单位	21
第四节 液柱测压计	24
第五节 作用于平面的液体压力	27
第六节 作用于曲面的液体压力	31
第七节 流体平衡微分方程	35
第八节 液体的相对平衡	38
思考题	44
习题	44
第三章 一元流体动力学基础	52
第一节 描述流体运动的两种方法	52
第二节 恒定流动和非恒定流动	53
第三节 流线和迹线	54
第四节 一元流动模型	55
第五节 连续性方程	56
第六节 恒定元流能量方程	59
第七节 过流断面的压强分布	62
第八节 恒定总流能量方程式	65
第九节 能量方程的应用	68
第十节 总水头线和测压管水头线	72
第十一节 恒定气流能量方程式	74
第十二节 总压线和全压线	78
第十三节 恒定流动量方程	80
思考题	85
习题	85

第四章 流动阻力和能量损失	91
第一节 沿程损失和局部损失	91
第二节 层流与紊流、雷诺数	92
第三节 圆管中的层流运动	96
第四节 紊流运动的特征和紊流阻力	99
第五节 尼古拉兹实验	104
第六节 工业管道紊流阻力系数的计算公式	106
第七节 非圆管的沿程损失	113
第八节 管道流动的局部损失	117
第九节 减小阻力的措施	126
思考题	128
习题	129
第五章 孔口管嘴管路流动	133
第一节 孔口自由出流	133
第二节 孔口淹没出流	135
第三节 管嘴出流	139
第四节 简单管路	141
第五节 管路的串联与并联	145
第六节 管网计算基础	147
第七节 有压管中的水击	151
思考题	154
习题	154
第六章 气体射流	158
第一节 无限空间淹没紊流射流的特征	158
第二节 圆断面射流的运动分析	163
第三节 平面射流	167
第四节 温差或浓差射流	168
第五节 旋转射流	174
第六节 有限空间射流	178
思考题	181
习题	182
第七章 不可压缩流体动力学基础	184
第一节 流体微团运动的分析	184
第二节 有旋流动	188
第三节 不可压缩流体连续性微分方程	191
第四节 以应力表示的黏性流体运动微分方程式	194
第五节 应力和变形速度的关系	195
第六节 纳维——斯托克斯方程	198
第七节 理想流体运动微分方程及其积分	202
第八节 流体流动的初始条件和边界条件	205
第九节 不可压缩黏性流体紊流运动的基本方程及封闭条件	206
思考题	207

习题	208
第八章 绕流运动	209
第一节 无旋流动	209
第二节 平面无旋流动	213
第三节 几种简单的平面无旋流动	217
第四节 势流叠加	222
* 第五节 平面无旋流动的有限差分法	228
第六节 绕流运动与附面层基本概念	237
第七节 附面层动量方程	239
* 第八节 平板上层流附面层的近似计算	241
* 第九节 平板上紊流附面层的近似计算	243
第十节 曲面附面层的分离现象与卡门涡街	245
第十一节 绕流阻力和升力	247
思考题	251
习题	251
第九章 一元气体动力学基础	254
第一节 理想气体一元恒定流动的运动方程	254
第二节 音速、滞止参数、马赫数	258
第三节 气体一元恒定流动的连续性方程	263
第四节 等温管路中的流动	266
第五节 绝热管路中的流动	270
思考题	273
习题	274
第十章 相似性原理和因次分析	275
第一节 力学相似性原理	275
第二节 相似准数	277
第三节 模型律	282
第四节 因次分析法	285
思考题	289
习题	289

下篇 泵 与 风 机

第十一章 叶片式泵与风机的理论基础	291
第一节 工作原理及性能参数	291
第二节 离心式泵与风机的基本方程——欧拉方程	293
第三节 叶型及其对性能的影响	298
第四节 理论的流量—压头曲线和流量—功率曲线	299
第五节 泵与风机的实际性能曲线	301
第六节 轴流式泵与风机	305
第七节 贯流式风机	307
第八节 相似律与比转数	308
第九节 相似律的实际应用	314

思考题	316
习题	316
第十二章 叶片式泵与风机在管路上的工作分析及调节	318
第一节 管路性能曲线及工作点	318
第二节 泵或风机的联合工作	322
第三节 离心式泵或风机的工况调节	324
第四节 管道内的压力分布	332
思考题	334
第十三章 泵或风机的安装方法与选择	335
第一节 离心式泵的构造特点	335
第二节 离心泵正常工作所需附件及扬程计算	339
第三节 泵的气蚀与安装高度	341
第四节 离心式风机的构造特点	348
第五节 通风机的安装	349
第六节 风机通用性能曲线图与选择性能曲线图	350
第七节 泵或风机的选择	353
思考题	358
习题	358
第十四章 其他常用泵及压气(缩)机	360
第一节 往复式泵	360
第二节 真空泵	361
第三节 深井泵	362
第四节 旋涡泵	363
第五节 活塞式压缩机	364
第六节 回转式压缩机	367
第七节 离心式压缩机	369
第八节 压缩机的排气温度及功率计算	370
附 录	
附录一 FLG 型立式防垢离心泵; FWG 型卧式防垢离心泵	372
附录二 KDB、KDBR 型第四代高效节能管道离心泵	378
附录三 AAB 型轴冷高效变频泵	380
附录四 T4-72 型离心通风机	381
附录五 SYQS 系列离心通风机	383
附录六 T40 型轴流通风机	384
附录七 GXF (SJG) 系列管道斜流风机	386
附录八 部分习题答案	389
学习辅导材料介绍	395

坐标选择无关，因而压强 p 是空间坐标的函数，与方向无关。

将(7-5-5)式代入(7-5-4)式，消去 p_i 即可得

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-5-6)$$

有了(7-5-6)式，三个法向应力变换为一个压强函数 p 。进一步减少了两个变量，这样方程(7-4-1)的未知数减为四个，与方程的个数相等，所以原则上讲已可求解了。

(7-5-1)式和(7-5-6)式统称为广义牛顿公式。

对于均匀流，设 $u_x = u(y, z)$, $u_y = u_z = 0$ ，流速沿流线是常数，故

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

则由式(7-5-4)可得

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p_i$$

这说明黏性流体均匀流动时，任意一点平行于水流方向的法向应力 p_{xx} 与垂直于水流方向的法向应力 p_{yy} 和 p_{zz} 相等。但这里 x 、 y 、 z 方向不是任取的，所以不能说压强与作用面的方向无关。

了解以上这些结论，对于压强的量测和流体力学问题的分析是有益的。

第六节 纳维——斯托克斯方程

将(7-5-1)式和(7-5-6)式代入(7-4-1)式，就可将(7-4-1)式中的应力消去。以其第一式为例得

$$\begin{aligned} X + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[-p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{du_x}{dt} \end{aligned}$$

整理得

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{du_x}{dt}$$

对于不可压缩流体 $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ ，代入得

同理可得

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (7-6-1)$$

这就是不可压缩黏性流体的运动微分方程，一般通称为纳维——斯托克斯方程。是不可压缩流体最普遍的运动微分方程。

以上三式加上不可压缩流体的连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

共四个方程，原则上可以求解方程组中的四个未知量：流速分量 u_x , u_y , u_z 和压强 p 。求解速度分量和压强只需从连续性方程和运动方程出发，而不必与能量方程联立，这是不可压缩流体流动求解的一大特点。

由于速度是空间坐标 x , y , z 和时间 t 的函数，(7-6-1) 式中的加速度项可以展开为四项，例如

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (7-6-2)$$

要注意的是在流速分量 u_x 对时间 t 求全微分时，指的是某一任取的流体质点的速度对时间的微分，因此就是加速度，此时 $u_x = u_x(x, y, z, t) = u_x[x(t), y(t), z(t), t]$ 。这种描述方法是拉格朗日法，故函数中的变量 x , y 和 z 指的是该质点在运动过程中的位置坐标，因此是时间 t 的函数，并非独立变量。而(7-6-2)式右端的四项中的各量又是独立变量 x , y , z 和 t 的函数，是欧拉描述方法了。这样，(7-6-2)式就完成了对加速度分量 du_x/dt 的描述由拉格朗日法到欧拉法的转换。

式中右边第一项表示空间固定点的流速随时间的变化（对时间的偏导数），称为时变加速度或当地加速度，后三项表示固定质点的流速由于位置的变化而引起的速度变化，称为位变加速度。例如第二项 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ ：表示在同一时刻由于在 x 方向上位置不同引起的单位长度上速度的变化， u_x 是流体质点在单位时间内在 x 方向上位置变化，因此两者乘积 $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ 表示流体质点的流速分量 u_x 在单位时间内单纯由于在 x 方向上的位移所产生的速度变化。

时变加速度和位变加速度之和又称为流速的随体导数。这种将随体导数（物理量对时间的全微商）分解成时变导数和位变导数的方法对流体质点所具有的物理量（矢量或标量）均适用。

这样，纳维——斯托克斯方程又可写成

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7-6-3)$$

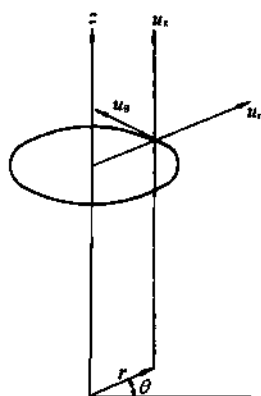


图 7-11 圆柱坐标系

在求解许多实际问题时，用圆柱坐标系 (r, θ, z) 更为方便，
现将圆柱坐标系（图 7-11）的纳维——斯托克斯方程列出如下，以便于应用。

$$\left. \begin{aligned} F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7-6-4)$$

式中 F_r 、 F_θ 、 F_z 为单位质量力在三个坐标轴 (r, θ, z) 的分量。不可压缩流体的连续性方程 (7-3-3) 式是

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

法向应力和切向应力分别为

$$\left. \begin{aligned} p_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ p_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7-6-5)$$

从数学上看, 纳维——斯托克斯方程是二阶非线性非齐次的偏微分方程组, 对于大多数较复杂的不可压缩黏性流体的流动问题, 难以用该方程求出精确解。目前只能对一些简单的流动问题, 例如圆管中的层流, 平行平面间的层流以及同心圆环间的层流等, 才能求得精确解。近代计算技术的迅速发展, 电子计算机的广泛应用, 已能够用纳维——斯托克斯方程求解出许多复杂流动问题的数值解。

【例 7-7】 试用纳维——斯托克斯方程求圆管层流运动的流速分布。

由于流动轴对称, 采用柱坐标系, 如图 7-12 所示。已知 $u_z = u(r, \theta, z)$, $u_\theta = u_r = 0$ 。

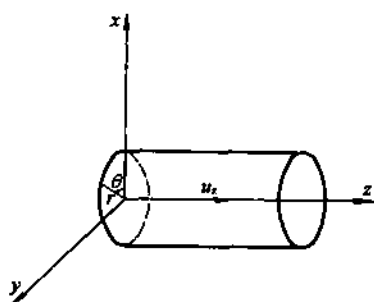


图 7-12 圆管层流

【例】 取 (7-6-4) 式中第三式

$$\begin{aligned} F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

由于是均匀流动, u_z 与坐标 z 无关, 流动对称, 故 u_z 不随 θ 而变, 于是 $u_z = u(r, \theta, z) = u(r)$ 。质量力 $F_z = 0$, 流动恒定, $\partial u_z / \partial t = 0$, 综上条件, 此式可简化为

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

由于 u 与 z 无关, 因此上式左端也将与 z 无关, 即 $\frac{\partial p}{\partial z}$ 沿 z 方向是常数, 设

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_1 - p_2}{L} = -\frac{\Delta p}{L} = -\gamma J$$

式中 J ——水力坡度;

γ ——容重。

等式右端加负号是由于压强沿流动方向是下降的。这样

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

对上式积分一次得

$$r \frac{du}{dr} = -\frac{\gamma J r^2}{\mu 2} + c_1$$

再积分一次得

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

当 $r=0$ 时, $\ln r \rightarrow \infty$, 而 u 为有限值, 则 $c_1=0$, 又由边界条件: $r=r_0$, $u=0$, 可得

$$c_2 = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2$$

于是有圆管中层流流动的速度分布

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

第七节 理想流体运动微分方程及其积分

当流体为理想流体时，运动黏性系数 $\nu=0$ ，纳维——斯托克斯方程 (7-6-3) 式简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (7-7-1)$$

这就是理想不可压缩流体的运动微分方程。第三章中的元流能量方程等均可由此式积分导得。

如果流体处于静止状态， $u_x = u_y = u_z = 0$ ，则 (7-7-1) 式简化为

$$\left\{ \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

此即欧拉平衡方程——流体平衡微分方程 (2-7-1a) 式。

现在我们把理想流体运动微分方程 (7-7-1) 进行变换，成为包含旋转角速度项的形式。为此，在方程中第一式的加速度项加 $\pm u_y \frac{\partial u_y}{\partial x}$ ， $\pm u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$ 之后，整理为

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + u_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

可以看出，第一括号可以转变为

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

而第二、三两个括号为

$$u_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y)$$